

2 Bac



ثانية بكالوريا علوم تجريبية

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

$$\pi = \frac{1}{2i}\oint \frac{dz}{z} \qquad \frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

$$e^{i\pi}+1=0$$

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}}$$

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{4^n}\cdot\zeta(n+1) \qquad \frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4(1-x)^4}{1-x^2}dx \qquad \pi = \int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(x)\,dx$$

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx \qquad \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \qquad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n \bmod k) \qquad \frac{1}{\pi} = \frac{12}{\sqrt{640320^3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

$$\pi$$

نماذج امتحانات وطنية تجريبية
مع التصحيح

الموسم الدراسي 2020 / 2021

الحمد لله رب العالمين وصلى الله على محمد وآله وصحبه و سلم

ثانية بكالوريا علوم تجريبية

التحضير للامتحان الوطني

مادة الرياضيات



بسم الله الرحمان الرحيم .... اللهم يسر وسدد وأعن ...

فهذه باقة من نماذج لامتحانات تجريبية مصححة

أسأل الله أن ينفع بها

والحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

ذ.محمد يزّوغ

موسم [2020 ; 2021]



ثانوية "الليمون" التأهيلية
2 باك علوم تجريبية

امتحان تجريبي رقم 1
في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ ولكل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

0,5 1 - أحسب u_2 و u_3 .

2 - نعتبر المتتالية (w_n) بحيث : $(\forall n \in \mathbb{N})\ w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

1 2 - أ - بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ،

0,5 2 - ب - أحسب w_n بدلالة n .

3 - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = 2^n . u_n$

1 3 - أ - بين أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول.

1 3 - ب - استنتج v_n ثم u_n بدلالة n

التمرين الثاني :

1 1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\sqrt{3}\,z^2 - 6z + 4\sqrt{3} = 0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطة A لحقها $a = \sqrt{3} - i$.

1 حدد معيار وعمده العدد a .

3) لتكن M نقطة لحقها z و M' لحقها z' صورة M بالدوران R الذي مركزه : O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

0,5 3 - أ - بين أن : $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$

2 3 - ب - لتكن B صورة A بالدوران R . حدد b لحق النقطة B على شكله الجبري والمثلثي.

0,5 3 - ج - استنتج القيمة المضبوطة للعددين : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث :

نضع : $I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2+x^3}$ و $J = \int_0^1 \frac{x^5}{2+x^3}\,dx$

0,5 1 - تحقق أن : $I = \frac{2}{3}\left(\ln(3) - \ln(2)\right)$

1 2 - بين أن : $I + J = \frac{1}{3}$ ثم استنتج قيمة J.

مسألـــة :

I نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - 2\ln(x)$$

1 (I-1) أدرس تغيرات الدالة g .

1,5 (I-2) بين أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث:

$1 < \alpha < \sqrt{2}$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ (نعطي :

$\ln(2) = 0{,}7$

$\sqrt{2} = 1{,}4$)

II نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

0,5 (II-1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

1 (II-2-أ) أثبت أن :

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

1 (II-2-ب) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,5 (II-3-أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = -\frac{x}{3}$ مقارب

مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

1 (II-3-ب) ادرس الوضع النسبي لـ : (Δ) و $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f .

1 (II-4) بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$

1,5 (II-5) ارسم (Δ) و $(\mathcal{C})$ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

(وحدة الطول هي $2cm$) نعطي : $f(\alpha) \simeq -0{,}3$

0,5 **III** (1 - باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$$

1 (III-2) أحسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$

و محور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما هي $x=1$ و $x=e$.

(لاحظ أن : $f(\alpha)$ قيمة قصوى مطلقة للدالة f)

تصحيح مقترح للتجريبي رقم 1.

التمرين الأول:

$u_1 = 1$ و $u_0 = 0$

$(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1- حساب u_2 و u_3 :

$u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 1 - \frac{1}{4}\times 0 = \boxed{1}$

$u_3 = u_2 - \frac{1}{4}u_1 = 1 - \frac{1}{4}\times 1 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

2- نضع: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

2-أ) نبين أن (w_n) هندسية:

ليكن n من $\mathbb{N}$. لدينا:

$w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$

$= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1}$

$= u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\underbrace{\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)}_{w_n}$

إذا: $\forall n\in\mathbb{N}\quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

2-ب) حساب w_n بدلالة n:

بما أن (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ فإن:

$(\forall n\in\mathbb{N});\quad w_n = q^n w_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0$

حيث: $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1 - 0 = \boxed{1}$

إذا: لكل n من $\mathbb{N}$: $\boxed{w_n = \frac{1}{2^n}}$

3- ليكن: $(\forall n\in\mathbb{N}),\quad v_n = 2^n u_n$

3-أ) نبين أن (v_n) متتالية حسابية؟

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

①

$v_{n+1} = 2^{n+1}u_{n+1}$

نعلم أن: $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ إذا:

$w_n + \frac{1}{2}u_n = u_{n+1}$

ومنه: $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}u_n = u_{n+1}$

نعوض في w_{n+1}:

$w_{n+1} = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{2^{n+1}}{2^n} + \frac{2^{n+1}}{2}u_n$

$= 2^1 + 2^n u_n = 2 + w_n$

وبالتالي:

$(\forall n\in\mathbb{N});\quad w_{n+1} = w_n + 2$

أي أن (w_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = 2}$

وحدها الأول هو:

$w_0 = 2^0 u_0 = 2\times 0 = \boxed{0}$

3-ب) الاستنتاج:

v_n بدلالة n:

بما أن (v_n) حسابية فإن:

$(\forall n\in\mathbb{N});\quad v_n = v_0 + (n-0)\times r$

$= 0 + n\times 2$

إذا:

لكل n من $\mathbb{N}$ $\boxed{v_n = 2n}$

u_n بدلالة n: لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

إذا: $v_n = 2^n u_n$ ؛ $u_n = \frac{v_n}{2^n} = \frac{2n}{2^n}$

$(\forall n\in\mathbb{N})\quad \boxed{u_n = \frac{n}{2^{n-1}}}$

التمرين الثاني:

1) المعادلة: $\sqrt{3}z^2 - 6z + 4\sqrt{3} = 0$

لدينا: $\Delta = (-6)^2 - 4(4\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$= 36 - 4\times 12 = 36 - 48 = -12 < 0$

حلان عقديان مترافقان: لدينا: $-\Delta = 12$

إذا: $z_1 = \frac{6 - i\sqrt{12}}{2(\sqrt{3})} = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{i2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3} - i}$

$z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} + i$

مجموعة الحلول هي:

$\{\sqrt{3} - i \,;\, \sqrt{3} + i\}$

2) A نقطة لحقها $a = \sqrt{3} - i$

معيار a:

$|a| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

عمدة a: ليكن θ عمدة a لدينا:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(a)}{|a|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(a)}{|a|} = \dfrac{-1}{2} < 0 \end{cases}$$

اذن: $\theta = -\dfrac{\pi}{6} \; [2\pi]$

$\cos(\theta) > 0$

$\sin(\theta) < 0$

ومنه

معيار a هو 2

عمدة a هو $-\dfrac{\pi}{6}$

3) R دوران مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

3-أ) صيغة R هي:

$z' = e^{i\pi/4} z$

اذن: $z' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) z$

3-ب) بما أن $B(b)$ هي صورة $A(a)$ بالدوران R فإننا نعوض:

$z' = b = z_B$

و z بالعدد a:

نجد:

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3} - i)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}-i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))$

$= \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = z_B = b$

وإذا:

$b = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

هو الشكل الجبري للعدد b.

الشكل المثلثي للعدد b:

لدينا: $b = e^{i\pi/4} a$

$\Rightarrow |b| = |e^{i\pi/4}| \times |a| = 1 \times 2 = 2$

و $\arg(b) = \arg(e^{i\pi/4} a) \; [2\pi]$

$\equiv \arg(e^{i\pi/4}) + \arg(a) \; [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{(3-2)}{12}\pi \equiv \dfrac{\pi}{12} \; [2\pi]$

اذن:

$b = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

3-ج) الاستنتاج:

من الكتابة المثلثية والجبرية للعدد b نستنتج أن:

$$\begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

أي أن:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

التمرين 3:

1- التحقق:

$I = \int_0^1 \dfrac{2x^2}{2 + x^3} dx$

لدينا: $(2 + x^3)' = 3x^2$

ومنه: $\dfrac{1}{3}(2 + x^3)' = x^2$

اذن: $2x^2 = \dfrac{2}{3}(2 + x^3)'$

نعوض في I:

$I = \int_0^1 \dfrac{\frac{2}{3}(2 + x^3)'}{(2 + x^3)} dx = \dfrac{2}{3}\int_0^1 \dfrac{(2 + x^3)'}{2 + x^3} dx$

$= \dfrac{2}{3}\left[\ln(2 + x^3)\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}(\ln(3) - \ln(2))$

2- حساب: $I+J$:

لدينا:

$$I+J=\int_0^1 \frac{2x^2}{2+x^3}\,dx+\int_0^1 \frac{x^5}{2+x^3}\,dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{2x^2}{2+x^3}+\frac{x^5}{2+x^3}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{2x^2+x^5}{2+x^3}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^2(2+x^3)}{2+x^3}\,dx=\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}-0=\boxed{\frac{1}{3}}$$

ملاحظة: قمنا بتطبيق خاصية الخطاتية:

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

استنتاج قيمة J :

لدينا: $(I+J)-I=J$

اذن وحسب ماسبق:

$$J=\frac{1}{3}-I$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}(\ln(3)-\ln(2))$$

$$\boxed{J=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

مسألة

I :

$$g(x)=1-\frac{x^3}{3}-2\ln(x)$$

I-1) تغيرات g :

g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، ولدينا لكل $x>0$:

$$g'(x)=-\frac{3x^2}{3}-\frac{2}{x}=-x^2-\frac{2}{x}<0$$

لأن $-x^2<0$ و $-\frac{2}{x}<0$

اذن g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
g	‖	↘

3 I-2) نفسر المعادلة $g(x)=0$

g دالة متصلة على المجال $[1;\sqrt{2}]$

ولدينا:

$$g(1)=1-\frac{1}{3}-2\ln(1)$$

$$=1-\frac{1}{3}-0=\frac{2}{3}>0$$

$$g(\sqrt{2})=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\ln(\sqrt{2})$$

$$=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{2}\ln(2)$$

$$\simeq 1-\frac{2\times 1,4}{3}-(0,7)$$

$$=\frac{3-2,8}{3}-0,7=\frac{0,2}{3}-\frac{2,1}{3}=\frac{-1.9}{3}<0$$

اذن:

$$g(1)\times g(\sqrt{2})<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة تقبل حلا $\alpha\in[1;\sqrt{2}]$

بما أن g تناقصية قطعا فإن α وحيد.

ملاحظة: بما أن g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ومتصلة على هذا المجال فإن α هو الحل الوحيد على $]0,+\infty[$.

إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$:

نلاحظ الجدول التالي:

x	0	α	$+\infty$
g	$++++$ (فوق الصفر)	0	$----$ (تحت الصفر)

نستنتج: g موجبة على المجال $]0,\alpha]$ وسالبة على $[\alpha,+\infty[$.

اذن:

$$\forall x\in]0,\alpha] :\ g(x)\geq 0$$
$$\forall x\in[\alpha,+\infty[:\ g(x)\leq 0$$

ملاحظة: يمكن القول أيضا:

0 قيمة دنيا لـ g على $]0,\alpha]$ اذن $\forall x\in]0,\alpha], g(x)\geq 0$

0 قيمة قصوى لـ g على $[\alpha;+\infty[$ اذن $\forall x\geq\alpha: g(x)\leq 0$

II

$f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{\ln(x)}{x^2}$; $(x \in]0,+\infty[)$

II-1) حساب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

نعلم أن $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ إذن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \text{"}\frac{-\infty}{0^+}\text{"} = \boxed{-\infty}$$

حساب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

نعلم أن: $(\forall n \geq 1)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty + 0 = \boxed{-\infty}$$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{3} = -\infty$)

II-2 أ) f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا:

$$f'(x) = \left(-\frac{x}{3} + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)'$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times \ln(x)}{(x^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{x(1-2\ln(x))}{x^4} = -\frac{1}{3} + \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

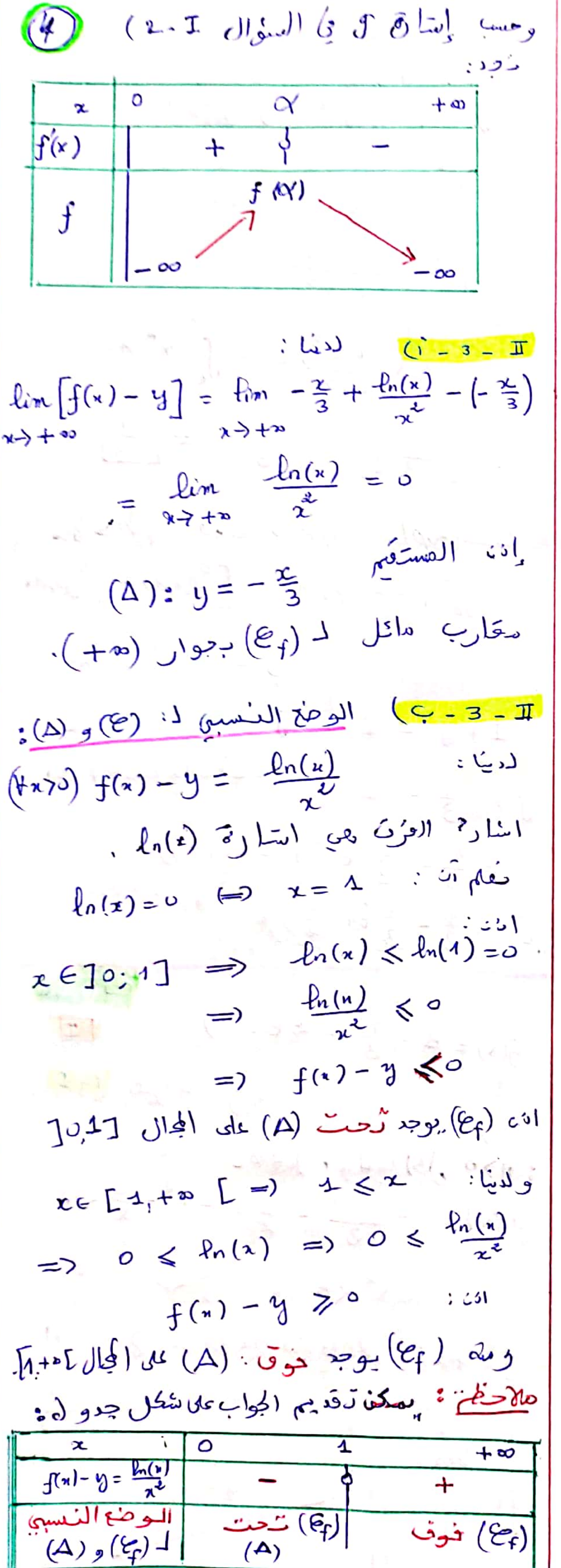
$$= \frac{-x^3 + 3 - 6\ln(x)}{3x^3}$$

$$= \frac{3\left(-\frac{x^3}{3} + 1 - 2\ln(x)\right)}{3x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

إذن: $(\forall x \in]0,+\infty[)$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

II-2 ب) جدول تغيرات الدالة f:

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأن: $(\forall x > 0)$; $x^3 > 0$



(4) وحسب إشارة g في السؤال (I-2) نجد:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

II-3 أ) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{3} + \frac{\ln(x)}{x^2} - \left(-\frac{x}{3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

إذن المستقيم $(\Delta): y = -\frac{x}{3}$

مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

II-3 ب) الوضع النسبي لـ: (C) و (Δ):

لدينا: $(\forall x > 0)$ $f(x) - y = \frac{\ln(x)}{x^2}$

إشارة الفرق هي إشارة $\ln(x)$.

نعلم أن: $\ln(x) = 0 \iff x = 1$

إذن:

$x \in]0;1] \Rightarrow \ln(x) \leq \ln(1) = 0$

$\Rightarrow \frac{\ln(x)}{x^2} \leq 0$

$\Rightarrow f(x) - y \leq 0$

إذن (C_f) يوجد تحت (Δ) على المجال $]0,1]$

ولدينا: $x \in [1,+\infty[\Rightarrow 1 \leq x$

$\Rightarrow 0 \leq \ln(x) \Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{x^2}$

إذن: $f(x) - y \geq 0$

ومنه (C_f) يوجد فوق (Δ) على المجال $[1,+\infty[$

ملاحظة: يمكن تقديم الجواب على شكل جدول:

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y = \frac{\ln(x)}{x^2}$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

(5)

III – 1) حساب : $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

نستعمل مكاملة بالأجزاء ، لدينا : $\frac{\ln x}{x^2} = \ln x \times \frac{1}{x^2}$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} ; \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

اذن :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= -\frac{\ln(e)}{e} - \left(-\frac{\ln(1)}{1}\right) - \int_1^e -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} - 0 - \int_1^e -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{1}\right)$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \boxed{1 - \frac{2}{e}}$$

III – 2) مساحة الحيز ~~المحصور بين (C)~~ ~~و~~ **هي :**

$$\left(\int_1^e |f(x)|\,dx\right) u.a$$

حيث :

$$u.a = (2cm)(2cm) = 4\,cm^2$$

لدينا $f(\alpha)$ قيمة قصوى مطلقة للدالة f على $]0,+\infty[$ (أنظر جدول التغيرات)

اذا

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad f(x) \leq f(\alpha) \simeq -0{,}3$$

ومنه f سالبة على المجال $[1;e]$.

أي أن : $\forall x \in [1;e] ; |f(x)| = -f(x)$

وبالتالي :

$$\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e -f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e \frac{x}{3} - \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \int_1^e \frac{x}{3}dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$

II – 4) لدينا : $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{3} + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}$

ونعلم أن : $g(\alpha) = 0$ اذن :

$$1 - \frac{\alpha^3}{3} - 2\ln(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -2\ln(\alpha) = -1 + \frac{\alpha^3}{3}$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^3}{6}$$

اذن :

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^3}{6}\right)$$

$$= -\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\alpha}{6}$$

$$= -\frac{\alpha}{3} + \frac{-\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{-2\alpha-\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha^2}$$

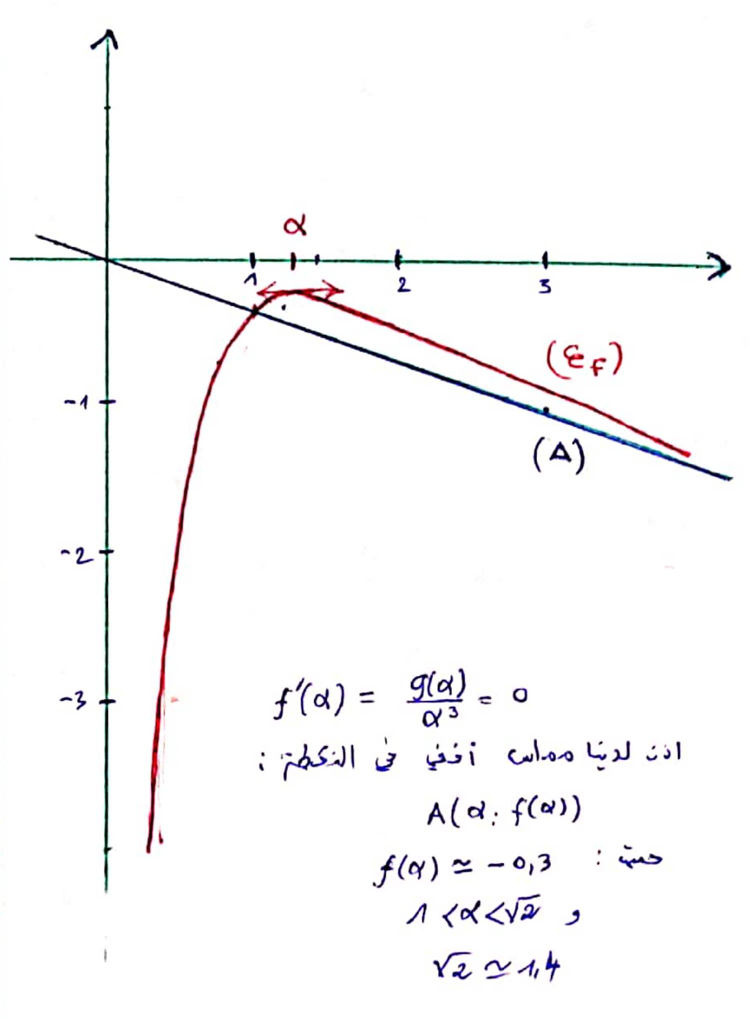
$$= \frac{-3\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha^2} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$= \frac{-\alpha^3}{2\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$$

اذن :

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}}$$

II – 5) إنشاء (Δ) و $(\mathcal{C})$:



6

وحسب السؤال السابق لدينا:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$$

إذن:

$$\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e \frac{x}{3}\,dx - \left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2\times 3}\right]_1^e - 1 + \frac{2}{e}$$

$$= \frac{e^2}{6} - \frac{1}{6} - 1 + \frac{2}{e}$$

$$= \frac{e^2}{6} + \frac{-1}{6} + \frac{-6}{6} + \frac{2}{e}$$

$$= \frac{e^2}{6} - \frac{7}{6} + \frac{2}{e}$$

المساحة المطلوبة إذن:

$$\left(\frac{e^2}{6} - \frac{7}{6} + \frac{2}{e}\right) 4\ cm^2$$

$$= \left(\frac{2e^2}{3} - \frac{14}{3} + \frac{8}{e}\right) cm^2$$

* * * * *

والحمد لله رب العالمين.



ثانوية الليمون التأهيلية

ثانية باك علوم فيزيائية

امتحان تجريبي رقم 2 في الرياضيات

الموسم الدراسي: 2020 2021 / المدة 3 ساعات

المعامل : 7

$\frac{1}{2}$

تمرين المتتاليات : 4 نقط / الأعداد العقدية : 5 نقط / التكامل ودراسة الدوال : 11 نقطة

التمرين الاول

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث : $u_0 = 2$ و : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n - \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$

0,5 1) أحسب u_1.

2) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$.

1 2-أ) تحقق أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{5}$.

1 2-ب) استنتج v_n ثم u_n بدلالة n.

0,5 2-ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع $w_n = \ln\left(\frac{1}{v_n}\right)$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

1 بين أن : $\lim w_n = +\infty$

التمرين الثاني

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : z^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, z + 4 = 0$

وليكن a و b حليها بحيث : $Im(a) < 0$.

0,5 1-أ) تحقق أن : $\Delta = \left(2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

1 1-ب) حدد الكتابة الجبرية للعددين a و b.

2) ليكن العدد العقدي c بحيث : $4c = a^2$.

1 2-أ) بين أن : $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ثم حدد الكتابة المثلثية للعدد c .

1 2-ب) إستنتج الكتابة المثلثية للعددين a و b .

0,5 3) بين أن :

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^8 + 1 = 0$$

4) المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B لحقاهما a و b على التوالي.

1 حدد زاوية الدوران R الذي مركزه O ويحول A إلى B .

التمرين الثالث

I نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x) = (x^2-1)e^x - x^2 e + e$ (e هو العدد النبيري)

0,5 1) تحقق أن : $g(x) = (x^2-1)(e^x - e)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $g(x) = 0$.

2) بين أن :

0,25 $(\forall x \in]-\infty; -1])$; $g(x) \leqslant 0$

0,25 $(\forall x \in]-1; +\infty[)$; $g(x) \geqslant 0$

2/2

II نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = (x-1)^2 e^x + \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) x e$$

حيث e هو العدد النبيري و $e = 2,7$

وليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) بين أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

0,5 2) أ- بين أن :

0,5 $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = x^3 \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} \cdot \frac{e^x}{x} + \frac{3 - x^2}{3x^2} \cdot e \right]$$

0,5 2) ب- إستنتج حساب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

0,75 3) بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

0,75 4) بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

1,5 5) بين أن $f'(x) = g(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

6) ليكن (T) المماس لـ : $(\mathcal{C})$ في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$.

0,5 تحقق أن معادلة ديكارتية لـ : (T) هي : $(T) : y = (e-1)x + 1$

7) أنشئ في نفس المعلم كلا من (T) و $(\mathcal{C})$. نقبل أن $(\mathcal{C})$ يقطع

2,5 محور الأفاصيل في نقطتين أفصولاهما : $\alpha = -0,6$ و $\beta = -1,3$

ونأخذ $f(-1) = -0,3$

III نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بالتعبير :

$$F(x) = (x^2 - 4x + 5) e^x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) e$$

وليكن D الحيز المحصور بين $(\mathcal{C})$ ومحور الأفاصيل والمستقيمان :

$(d_1) : x = 0$ و $(d_2) : x = 1$

1 1) بين أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

1,5 2) استنتج أن مساحة الحيز D هي : $\mathcal{A}(D) = \left(\frac{29}{3} e - 20\right) cm^2$

* * *

إنجاز ذ. محمد يزوغ

تصحيح الامتحان التجريبي رقم 2 :

التمرين الأول

$u_0 = 2$

$(\forall n\in\mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n - \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$

1) حساب u_1 :

$u_1 = u_{0+1} = \frac{4}{5}u_0 - \frac{3^{0+1}}{5^{0+2}}$

$= \frac{4}{5}\times 2 - \frac{3^1}{5^2} = \frac{8}{5} - \frac{3}{25}$

$= \frac{40-3}{25} = \boxed{\frac{37}{25}}$

2) لدينا : $v_n = u_n - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

2-أ) التحقق : لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:

$v_{n+1} = u_{n+1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{(n+1)+1}$

$= \frac{4}{5}u_n - \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}$

$= \frac{4}{5}u_n - \frac{1}{5}\times\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{3}{5}\times\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}$

$= \frac{4}{5}u_n - \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{4}{5}u_n - \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}\left(\frac{4}{5}\right)$

$= \frac{4}{5}\left(u_n - \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}\right) = \frac{4}{5}\left(\underbrace{u_n - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}_{v_n}\right)$

إذن :

$(\forall n\in\mathbb{N}) : v_{n+1} = \frac{4}{5}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{5}$

2-ب) الاستنتاج : بما أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ فإن : $v_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n v_0$

حيث : $v_0 = u_0 - \left(\frac{3}{5}\right)^{0+1}$

$= 2 - \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

وبالتالي : $\boxed{v_n = \frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

نعلم أن : $v_n = u_n - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

إذن : $u_n = v_n + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

ومنه : $\boxed{u_n = \frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}$

2-ج) حساب $\lim u_n$:

بما أن : $-1 < \frac{3}{5} < 1$ فإن : $\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

وبما أن : $-1 < \frac{4}{5} < 1$ فإن : $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

إذن : $\lim u_n = \lim \frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

$= \lim \frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$= \frac{7}{5}\times 0 + \frac{3}{5}\times 0 = \boxed{0}$

3) لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$w_n = \ln\left(\frac{1}{v_n}\right)$

$= \ln\left(\frac{5}{7}\times\left(\frac{5}{4}\right)^n\right)$

$= \ln\left(\frac{5}{7}\right) + n\ln\left(\frac{5}{4}\right)$

ولدينا : $\frac{5}{4} > 1$ إذن : $\ln\left(\frac{5}{4}\right) > 0$

ومنه :

$\lim n\ln\left(\frac{5}{4}\right) = +\infty$

" لأن : $\lim n = +\infty$ "

إذن : $\boxed{\lim w_n = +\infty}$

التمرين الثاني

$(E) : z^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, z + 4 = 0$

1-أ) لدينا : $\left(2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 4i^2\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

$= -4(2-\sqrt{2}) = -8+4\sqrt{2}$

ومن جهة أخرى لدينا ،

(2)

$2\,Arg(a) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ إذن:

$\Rightarrow Arg(a) = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ولدينا،

$|4c| = |a^2| \Rightarrow 4|c| = |a|^2$

$\Rightarrow 4 = |a|^2 \Rightarrow |a| = 2$

إذن:

$$a = \left[2 ; -\frac{\pi}{8}\right]$$

طريقة 2:

ليكن r معياره و θ عمدة a

لدينا:

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = [r ; \theta]^2 \\ c = \left[1 ; -\frac{\pi}{4}\right] \quad و \\ 4 = [4 ; 0] \end{cases}$$

إذن:

$a^2 = 4c$

$\Rightarrow [r ; \theta]^2 = [4 ; 0] \times \left[1 ; -\frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow [r^2 ; 2\theta] = \left[4 \times 1 ; 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\Rightarrow [r^2 ; 2\theta] = \left[4 ; -\frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow r^2 = 4$ و $2\theta = -\frac{\pi}{4} \, [2\pi]$

إذا:

$r = 2$ و $\theta = -\frac{\pi}{8} \, [\pi]$

وبالتالي:

$$a = \left[2 ; -\frac{\pi}{8}\right]$$

الكتابة المثلثية للعدد b:

$b = \bar{a} = \overline{\left[2 ; -\frac{\pi}{8}\right]} = \left[2 ; \frac{\pi}{8}\right]$

2 - ب) لدينا،

$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^8$

$= \left(\frac{a}{2}\right)^8 = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{a^2}{4}\right)^4$

$= c^4 = \left[1 ; -\frac{\pi}{4}\right]^4 = [1 ; -\pi]$

$= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

$\Delta = \left(-2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 4(4)$

$= 4(2+\sqrt{2}) - 16 = 8 + 4\sqrt{2} - 16$

$= -8 + 4\sqrt{2}$

ومنه نستنتج أن:

$$\Delta = \left(2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

1 - ب) بما أن: $\Delta = \left(2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

فإن:

$a = \frac{-b - 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2a}$

$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}} - 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$= \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

و

$$b = \bar{a} = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

2) لنحدد c من $\mathbb{C}$ بحيث: $4c = a^2$

2 - أ) لدينا:

$4c = a^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

$= 2+\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

$= 2+\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} - (2-\sqrt{2})$

$= 2+\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} - 2+\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}$

$\Rightarrow c = \frac{2\sqrt{2}}{4} - i\frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

الكتابة المثلثية لـ c:

بما أن:

$c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

فإن:

$c = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left[1 ; -\frac{\pi}{4}\right]$

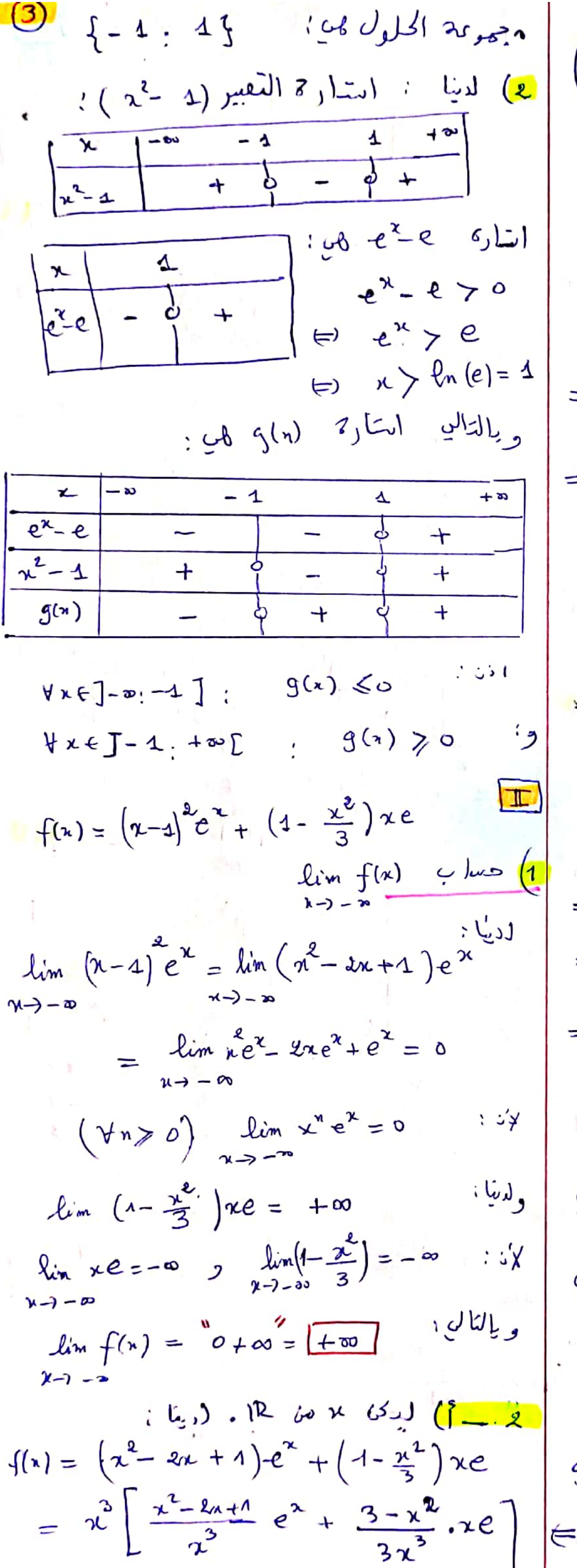
2 - ب) الاستنتاج:

الكتابة المثلثية للعدد a:

$a^2 = 4c \Rightarrow Arg(a^2) = Arg(4c) \, [2\pi]$

$\Rightarrow 2\,Arg(a) = Arg(4) + Arg(c) \, [2\pi]$

$\Rightarrow 2\,Arg(a) = 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \, [2\pi]$



(3) مجموعة الحلول هي: $\{-1 ; 1\}$

2) لدينا : اشارة التعبير (x^2-1):

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

اشارة e^x-e هي:

$$e^x - e > 0$$
$$\iff e^x > e$$
$$\iff x > \ln(e) = 1$$

x		1	
e^x-e	$-$	0	$+$

وبالتالي اشارة $g(x)$ هي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
e^x-e		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

اذن:

$\forall x \in]-\infty ; -1] : \quad g(x) \leq 0$

و: $\forall x \in]-1 ; +\infty[\quad : \quad g(x) \geq 0$

II

$$f(x) = (x-1)^2 e^x + \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) x e$$

1) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)^2 e^x = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 1) e^x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x - 2x e^x + e^x = 0$$

لأن: $(\forall n > 0) \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

ولدينا: $\lim \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) x e = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = -\infty$

وبالتالي: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{"}0 + \infty\text{"} = +\infty$

2-أ) ليكن x من $\mathbb{R}$. لدينا:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) e^x + \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) x e$$
$$= x^3 \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3} e^x + \frac{3 - x^2}{3x^3} \cdot x e \right]$$

وبالتالي:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^8 + 1 = 0$$

طريقة أخرى: نعلم أن: $a = 2 e^{-i\pi/8}$

اذن:

$$\left(\frac{a}{2}\right) = e^{-i\pi/8} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^8 = \left(e^{-i\pi/8}\right)^8$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^8 = e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^8 = -1$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^8 + 1 = 0$$

4) صيغة الدوران R العقدية هي:

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$
$$= e^{i\theta} z$$

بما أن: $R(A) = B$ فإن: $z_B = e^{i\theta} z_A$

أي أن: $b = e^{i\theta} a$ اذن:

$$\text{Arg}(b) = \text{Arg}(e^{i\theta} a) \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \text{Arg}(b) = \text{Arg}(e^{i\theta}) + \text{Arg}(a) \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{8} \equiv \theta + \left(-\frac{\pi}{8}\right) \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \equiv \theta \ [2\pi] \Rightarrow \frac{\pi}{4} \equiv \theta \ [2\pi]$$

اذن زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{4}$

التمرين الثالث

I $g(x) = (x^2 - 1)e^x - x^2 e + e$

1) التحقق:

$$g(x) = (x^2 - 1)e^x - (x^2 e - e)$$
$$= (x^2 - 1)e^x - (x^2 - 1)e$$
$$= (x^2 - 1)(e^x - e)$$

المعادلة:

$g(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0$ أو $e^x - e = 0$

$\iff (x-1)(x+1) = 0$ أو $e^x = e$

$x = 1$ أو $x = -1$ أو $x = \ln(e)$

$$f(x) = x^3\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2}\times\frac{e^x}{x} + \frac{3-x^2}{3x^2}\times\frac{xe}{x}\right)$$

$$= x^3\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2}\times\frac{e^x}{x} + \frac{3-x^2}{3x^2}\times e\right]$$

2.ب) استنتاج حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-x^2}{3x^2}\times e = \lim\frac{-x^2}{3x^2}e$

$= -\frac{1}{3}e$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2}\times\frac{e^x}{x} + \frac{3-x^2}{3x^2}e\right]$

$= "+\infty\times\left(+\infty-\frac{e}{3}\right)" = \boxed{+\infty}$

3) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

لدينا باستخدام السؤال 2-أ):

$$\frac{f(x)}{x} = x^2\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2}\times\frac{e^x}{x} + \frac{3-x^2}{3x^2}e\right]$$

(عند $-\infty$: $x^2 \to +\infty$ ؛ $\frac{x^2-2x+1}{x^2}\to 1$ ؛ $\frac{e^x}{x}\to\frac{0^+}{-\infty}=0$ ؛ $\frac{3-x^2}{3x^2}\to -\frac{1}{3}$)

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = "+\infty\times\left(0-\frac{e}{3}\right)" = \boxed{-\infty}$

تأويل هندسي: لدينا مما سبق:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ في اتجاه محور الأراتيب.

4) لدينا:

$$\frac{f(x)}{x} = x^2\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2}\times\frac{e^x}{x} + \frac{3-x^2}{3x^2}\times e\right]$$

(عند $+\infty$: $x^2\to+\infty$ ؛ $\frac{x^2-2x+1}{x^2}\to 1$ ؛ $\frac{e^x}{x}\to+\infty$ ؛ $\frac{3-x^2}{3x^2}\to -\frac{1}{3}$)

إذن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = "+\infty\times\left(1\times+\infty-\frac{e}{3}\right)" = "+\infty(+\infty)"$

$= \boxed{+\infty}$

تأويل هندسي: لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ومنه: (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $(+\infty)$.

5) f ق.ت على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$f(x) = (x-1)^2e^x + \left(1-\frac{x^2}{3}\right)xe$

$= (x-1)^2e^x + xe - \frac{x^3}{3}e$

إذن:

$f'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2e^x + e - \frac{3x^2}{3}e$

$= (2x-2+(x-1)^2)e^x + e - x^2e$

$= (2x-2+x^2-2x+1)e^x + e - x^2e$

$= (x^2-1)e^x - x^2e + e = g(x)$

إذن:

$(\forall x\in\mathbb{R}),\ f'(x) = g(x)$

جدول تغيرات الدالة f:

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ وحسب السؤال I-2) لدينا:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↗	$+\infty$

(5)

$F(x) = (x^2-4x+5)e^x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right)e$

1) لدينا : F ق.ش على $\mathbb{R}$ و لكل x من $\mathbb{R}$:

$F'(x) = (2x-4)e^x + (x^2-4x+5)e^x + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)e$

$= (2x-4+x^2-4x+5)e^x + x\left(1-\frac{x^2}{3}\right)e$

$= (x^2-2x+1)e^x + \left(1-\frac{x^2}{3}\right)xe$

$= (x-1)^2e^x + \left(1-\frac{x^2}{3}\right)xe = f(x)$

اذن :

$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F'(x) = f(x)$

وهذا يعني أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

2) الاستنتاج :

مساحة $\mathcal{D}$ هي :

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx\right)(u.a)$

حيث $u.a = 2cm \times 2cm = 4\,cm^2$ وحدة المساحة.

f دالة تزايدية على المجال $[0;1]$ إذن $f(0)$ قيمة دنيا وبالتالي :

$\forall x \in [0;1], \ f(x) \geqslant f(0) = 1 > 0$

ومنه :

$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

$= [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$

ولدينا :

$F(1) = (1-4+5)e + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right)e = 2e + \frac{5}{12}e$

$= \frac{24+5}{12}e = \frac{29}{12}e$

و $F(0) = 5e^0 + 0 = 5$

اذن :

$F(1) - F(0) = \frac{29}{12}e - 5$

ومنه :

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \left(\frac{29}{12}e - 5\right) \times 4\,cm^2$

أي أن :

$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \left(\frac{29}{3}e - 20\right)cm^2}$

★ ★ ★ ★

II

ملاحظة : ① f تقبل قيمة دنيا هي $f(-1)$

② الدالة f' تنعدم مرتين في : -1 وفي 1 وهذا معناه أن $(\mathcal{C})$ يقبل مماسين أفقيين في النقطتين : $A(-1; f(-1))$ و $B(1; f(1))$

6) معادلة المماس (T) هي :

$(T): \ y = f'(0)x + f(0)$

حيث :

$f(0) = e^0 + 0 = 1$

و $f'(0) = g(0) = -(e^0 - e)$

$= -(1-e) = e - 1$

اذن :

$(T): \ y = (e-1)x + 1$

7) إنشاء $(\mathcal{C})$ و (T).

لدينا : $e \simeq 2{,}7$ اذن : $(T): y = 1{,}7x + 1$

$f(-1) = -0{,}3$ قيمة دنيا للدالة f.

$(T): y = (e-1)x+1$

$(\mathcal{C}_f)$

-2 β -1 α 0 1 2

4 3 2 1 -1 -2

2021 - 2020

المدة 3 ساعات | المعامل 7

امتحان تجريبي رقم 3

ثانوية الليمون التأهيلية
2 باك علوم تجريبية

التمرين الأول (2,5 ن)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

0,25 ① أحسب u_1

0,5 ② برهن بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n \leq 8$

③ لتكن المتتالية (v_n) بحيث : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = u_n - 8$

0,5 3 - أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

0,75 3 - ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

0,5 ④ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثاني (5 ن)

1 ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, z + 4 = 0$

② نضع : $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

0,5 ~~2 - أ) حدد الكتابة الجبرية للعدد z^2.~~

0,75 2 - ب) حدد الشكل المثلثي للعدد z^2.

0,75 2 - ج) استنتج أن : $|z| = 2$ وأن : $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

0,5 2 - د) استنتج القيمة المضبوطة للعددين : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

③ المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
نعتبر النقط A و B و C ألحاقها على التوالي : $a = 2\sqrt{2}i$ و $b = 2\sqrt{2}$ و $c = z^2$
وليكن R الدوران ذو المركز C والزاوية $\frac{\pi}{2}$.

1 3 - أ) برهن أن B هي صورة A بالدوران R.

0,5 3 - ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

التمرين الثالث (12,5 ن)

I نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ ب : $g(x) = -1 + \frac{1}{x} - 2\ln x$

1 ① أحسب $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

0,75 ② بين أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $]0, +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها.

0,75 ③ أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة g على المجالين $]0, 1]$ و $[1, +\infty[$.

II

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln(x) \; ; (x>0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم : $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,5 1 - a) بين أن الدالة f متصلة في 0 على اليمين .

1 1 - b) ادرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليمين ثم اعط تأويلا هندسيا النتيجة .

1 ② أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم ادرس الفرع اللانهائي لـ: $(\mathscr{C})$ بجوار $(+\infty)$.

0,5 3 - أ) بين أن: $\forall x \in]0+\infty[\; ; \; f'(x) = xg(x)$

0,75 3-ب) استنتج منحى تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها .

1 ④ ادرس على المجال $]0;+\infty[$ الوضع النسبي لـ: $(\mathscr{C})$ والمستقيم الذي معادلته : $y = x$.

0,75 ⑤ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ بحيث : $1 < \alpha < 2$. نعطي : $\ln(2) \simeq 0{,}7$

1 ⑥ أنشئ $(\mathscr{C})$. $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\,cm)$

1 ⑦أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن:

$$\int_1^{\alpha} x^2 \ln x \, dx = \frac{3\alpha^3 \ln\alpha - \alpha^3 + 1}{9}$$

1 ⑦ب) حدد مساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C})$ ومحور الافاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما هي: $x = 1$ و $x = \alpha$.

III

لتكن (θ_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $\theta_0 = \frac{1}{2}$ و :

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

0,5 ① برهن بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \; \frac{1}{4} < \theta_n < 1$

0,5 ② برهن أن (θ_n) متتالية تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة.

0,5 ③ أحسب $\lim \theta_n$

★ ★ ★

من اقتراح الاستاذ : Soufiane BASSY
Lyceé Sidi Daoud (2 BAC PC + SVT)

تصحيح مقترح:

التمرين الأول:

$u_0 = 5$

$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

① حساب u_1:

$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(5) + 2 = \frac{15}{4} + \frac{8}{4} = \boxed{\frac{23}{4}}$

② نبرهن بالترجع: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 8$

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0 < 8$

$\Leftrightarrow 5 < 8$

وهذا صحيح . اذن العبارة صحيحة اذا كان $n=0$.

نبكن $n \geq 0$ نفترض أن $u_n > 8$

اذن: $\frac{3}{4}u_n > \frac{3}{4}\times 8$

$\Rightarrow \frac{3}{4}u_n + 2 > \frac{3\times 8}{4} + 2 = 6+2 = 8$

اذن: $u_{n+1} > 8$

ومنه العبارة صحيحة من أجل $n+1$.

حسب مبدأ الترجع:

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n > 8$

③ $(\forall n \in \mathbb{N});\ v_n = u_n - 8$

3 - أ) نبرهن أن (v_n) هندسية:

ليكن n من $\mathbb{N}$.

لدينا:

$v_{n+1} = u_{n+1} - 8$

$= \left(\frac{3}{4}u_n + 2\right) - 8$

$= \frac{3}{4}u_n - 6 = \frac{3}{4}\left(u_n - \frac{4}{3}\times 6\right)$

$= \frac{3}{4}(u_n - 8) = \frac{3}{4}v_n$

ومنه: $(\forall n \in \mathbb{N});\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

اذن (v_n) هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{3}{4}}$

3 - ب) بما أن (v_n) هندسية فإن:

$(\forall n \in \mathbb{N});\ v_n = q^n v_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n v_0$

حيث: $v_0 = u_0 - 8 = 5 - 8 = -3$

اذن: $\boxed{v_n = -3\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

استنتاج u_n:

نعلم أن: $v_n = u_n - 8$ اذن:

$u_n = v_n + 8 = -3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$

ومنه: $\boxed{u_n = -3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8}$

④ حساب $\lim u_n$:

بما أن: $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإن: $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

ومنه: $\lim u_n = -3\times 0 + 8 = \boxed{8}$

التمرين الثاني:

① $z^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\,z + 4 = 0$

لدينا:

$\Delta = \left(-2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 4(4)$

$= 4\sqrt{2+\sqrt{2}}^2 - 4(4)$

$= 4(2+\sqrt{2} - 4) = 4(\sqrt{2} - 2)$

$= -4(2-\sqrt{2}) = -4\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

$= i^2 2^2 \sqrt{2-\sqrt{2}}^2 = \left(i2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

حل المعادلة عددان عقديان مترافقان:

$z_1 = \dfrac{2\sqrt{2+\sqrt{2}} - i2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$z_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

و $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ملاحظة: $\sqrt{2} - 2 < 0$ اذا $\Delta < 0$

ولدينا: $\sqrt{2} - 2 = -(2-\sqrt{2})$

$= -\sqrt{2-\sqrt{2}}^2$

② لـيكن . $Z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

2-أ) الكتابة الجبرية للعدد z^2:

$$z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= 2+\sqrt{2} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})$$
$$= 2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2}$$

اذن: $z^2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2-ب) الشكل المثلثي للعدد z^2:

معيار z^2:

$$|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

اذن:

$$z^2 = 4\left(\frac{2\sqrt{2}}{4} + i\frac{2\sqrt{2}}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

اذن: $z^2 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

يمكن أيضا كتابة: $z^2 = \left[4 ; \frac{\pi}{4}\right]$

2-ج) الاستنتاج:

نضع: $z = [r ; \theta]$

حيث: $\theta = Arg(z)[2\pi]$ و $r = |z|$

لدينا:

$$[r ; \theta]^2 = z^2 = \left[4 ; \frac{\pi}{4}\right]$$
$$\Rightarrow [r^2 ; 2\theta] = \left[4 ; \frac{\pi}{4}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ولدينا

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi, (k\in\mathbb{Z}) \\ Re(z) > 0 \\ Im(z) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

اذن

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + 2k\pi ; (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

وبالتالي: $|z| = 2$ و $Arg(z) = \frac{\pi}{8}[2\pi]$

ج

2-د) نعلم من جهة أن:

$$z = \left[2 ; \frac{\pi}{8}\right] = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

ومن جهة أخرى:

$$Z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

ومنه:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

③ A لحقها: $a = 2\sqrt{2}i$

B لحقها $b = 2\sqrt{2}$

C لحقها: $c = z^2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

3-أ) صيغة الدوران R هي:

$$z' = e^{i\pi/2}(z - z_C) + z_C$$

حيث $M'(z')$ هي صورة $M(z)$

لنبين أن $A'(a')$ صورة $A(a)$ بالدوران R.

نبين أن $A' = B$

لدينا:

$$a' = e^{i\pi/2}(z_A - z_C) + z_C$$
$$= e^{i\pi/2}\left(2\sqrt{2}i - (2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2})\right) + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$
$$= i\left(2\sqrt{2}i - 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$
$$= -i2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = b$$

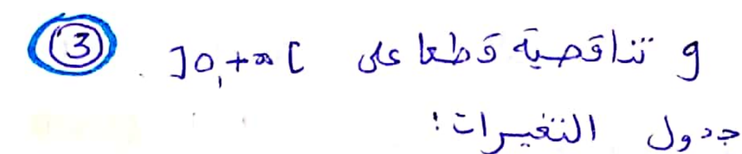
ومنه: $a' = b$ اذن $A'(a') = B(b)$

وهذا يعني أن B هي صورة A بالدوران R

3-ب) استنتاج طبيعة ABC:

لدينا مما سبق: $b = e^{i\pi/2}(a-c) + c$

$$\Rightarrow b - c = e^{i\pi/2}(a-c)$$



جدول التغيرات:

x	0 $\quad\quad\quad$ $+\infty$
g	$+\infty$ ↘ $-\infty$

(3) لدينا: $g(1) = -1 + \frac{1}{1} - 2\ln(1)$

$= -1 + 1 - 2\times 0 = 0$

ملاحظة: 1 هو العدد الوحيد الذي يحقق المعادلة $g(x)=0$ لأن: g تناقصية قطعا)

الاستنتاج:

g تناقصة قطعا وتنعدم في 1 اذن:

$g \geq 0$ على المجال $]0;1]$

$g \leq 0$ على المجال $[1+\infty[$.

ملاحظة: نعرف اشارة g من خلال جدول تغيراتها:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ +++ منطقة موجبة	0	- - - $-\infty$

$]0;1]$ ، $[1+\infty[$ ؛ أعداد (صور) سالبة

نلاحظ أن: $\begin{cases} x\in]0;1] \Rightarrow g(x) \geq 0 \\ x\in [1;+\infty[\Rightarrow g(x) \leq 0 \end{cases}$

لأن: 0 قيمة دنيا على المجال $]0;1]$
0 " قصوى " " $[1,+\infty[$

[II] $\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln(x); \ (x>0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(a-1) نعلم أن: $\lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0$ $(n\geq 1)$

ولدينا: $f(0)=0$ اذن:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$

$\Rightarrow \frac{b-c}{a-c} = e^{i\pi/2} = i$

$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{b-c}{a-c}\right| = 1 \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} BC = AC \\ (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

ومنه ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C

ملاحظة:

$\frac{b-c}{a-c} = i \Leftrightarrow \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = [1; \frac{\pi}{2}]$

متساوي الساقين في C

قائم الزاوية في C

التمرين الثالث

[I] $\forall x>0 \quad g(x) = -1 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

(1) نعلم أن: $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ ومنه:

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = "+\infty - (-\infty)" = \boxed{+\infty}$

(لأن: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$)

حساب: $\lim_{+\infty} g$:

لدينا: $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

اذن: $\lim_{x\to +\infty} g(x) = "-(+\infty)" = \boxed{-\infty}$

(2) g ق.ت على $]0,+\infty[$ و:

$(\forall x>0); \ g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} < 0$

لأن: $-\frac{2}{x} < 0$ و $-\frac{1}{x^2} < 0$ اذن:

إذن: **f متصلة في 0 على اليمين.**

1- b) لدينا: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$

$= \frac{x}{x} - \frac{x^2\ln(x)}{x} = 1 - x\ln(x)$

إذن: $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} 1 - x\ln(x)$

$= 1 - 0 = 1$

إذن **f قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين**

التأويل الهندسي:

$(\mathscr{C})$ يقبل نصف مماس في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$ معادلته:

$$\begin{cases} y = f_d'(0)(x-0) + f(0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

أي: $(x \geq 0$ و $y = x)$

ملاحظة: التأويلات الهندسية عند دراسة دالة ينبغي أن تظهر في الرسم عند إنشاء $(\mathscr{C})$.
لهذا من الجيد معرفة معادلة نصف المماس.

2) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

مباشرة نجد "$+\infty-(+\infty)$" وهو ش.غ.م.

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1 - x\ln(x))$

$= "+\infty \times (-\infty)" = -\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$)

دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

نحسب: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = ?$

4) لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - x\ln(x)$

$= "-(+\infty)" = -\infty$

إذن **$(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $(+\infty)$.**

3- أ) f ق.ت.ش على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$(\forall x>0);\ f'(x) = 1 - 2x\ln(x) - x^2 \times \frac{1}{x}$

$= 1 - 2x\ln(x) - x = x\left(\frac{1}{x} - 2\ln x - 1\right)$

$= x\left(-1 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)\right) = xg(x)$

إذن:

$(\forall x \in]0;+\infty[)\quad f'(x) = xg(x)$

3- ب) الاستنتاج:

منحى التغيرات:

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ (لأن: $x>0$)

ولدينا:
- $g \geq 0$ على المجال $]0;1]$
- $g \leq 0$ على المجال $[1;+\infty[$.

إذن:
- f تزايدية على المجال $[0;1]$ (قطعا)
- f تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$.

ملاحظة: f معرفة في 0 لهذا قمنا بغلق المجال $]0;1]$

جدول تغيرات الدالة f:

x	0	1	$+\infty$
f	0 ↗	1	↘ $-\infty$

$f(1) = 1 - 1^2\ln(1) = 1 - 0 = \boxed{1}$

4) الوضع النسبي لـ (C) والمستقيم ذو المعادلة: $y = x$.

لدينا لكل $x \in]0,+\infty[$ ؛

$$f(x) - y = x - x^2\ln(x) - x = -x^2\ln(x)$$

$$-x^2\ln(x) = 0 \iff (x^2 = 0 \text{ أو } \ln(x) = 0)$$

$$\iff \ln(x) = 0 \quad (x \neq 0 \text{ لأن})$$

$$\iff x = 1$$

ولدينا:

$$x \in]0;1] \Rightarrow \ln(x) \leq \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2\ln(x) \leq 0 \Rightarrow -x^2\ln(x) \geq 0$$

اذا (C) يوجد فوق المستقيم على المجال $]0;1]$.

على المجال: $[1+\infty[$ لدينا:

$$x \in [1+\infty[\Rightarrow 1 \leq x \Rightarrow \ln(1) \leq \ln(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2\ln(x) \Rightarrow 0 \geq -x^2\ln(x)$$

$$\Rightarrow 0 \geq f(x) - y \Rightarrow y \geq f(x)$$

اذا (C) يوجد تحت المستقيم على المجال $[1,+\infty[$.

5) الدالة f:

متصلة على المجال $[1;+\infty[$.

ولدينا من خلال جدول التغيرات:

$$f([1,+\infty[) =]-\infty;1]$$

اذن: $0 \in f([1;+\infty[)$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α في المجال $[1,+\infty[$

هذا الحل وحيد لأن f تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$.

وبما أن: $0 \notin f(]0;1]) =]0;1]$

فإننا نستنتج أن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ على $]0,+\infty[$.

نبين أن: $1 < \alpha < 2$.

لدينا:

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f(2) = 2 - 4\ln(2) \simeq 2 - 4 \times 0,7 = 2 - 2,8 = -0,8 < 0$$

اذا: $f(1) \times f(2) < 0$

ومنه: $\boxed{1 < \alpha < 2}$

6) إنشاء (C):

$f'(1) = 1g(1) = 0$

اذا: مماس أفقي في $A(1,1)$

⑥ $\int_1^{\alpha} |f(x)| dx = \frac{\alpha^2-1}{2} - \frac{3\alpha^3\ln(\alpha)-\alpha^3+1}{9}$

$$= \frac{9(\alpha^2-1) - 2(3\alpha^3\ln(\alpha)-\alpha^3+1)}{2\times 9}$$

$$= \frac{1}{18}\left(9\alpha^2 - 9 - 6\alpha^3\ln(\alpha) + 2\alpha^3 - 2\right)$$

$$= \frac{1}{18}\left(2\alpha^3 - 6\alpha^3\ln(\alpha) + 9\alpha^2 - 11\right)$$

يمكننا تبسيط هذه النتيجة أكثر

باستعمال : $f(\alpha) = 0$ اذن :

$\alpha - \alpha^2\ln(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha^2\ln(\alpha)$

$\Rightarrow -6\alpha^2 = -6\alpha(\alpha^2\ln(\alpha)) = -6\alpha^3\ln(\alpha)$

اذن :

$2\alpha^3 - 6\alpha^3\ln(\alpha) + 9\alpha^2 - 11 = 2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha^2 - 11$

$= 2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 11$

اذن المساحة المطلوبة هي :

$\frac{1}{18}(2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 11)\ cm^2$

III

نعرف المتتالية (θ_n) :

$$\begin{cases} \theta_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ;\ \theta_{n+1} = f(\theta_n) \end{cases}$$

① نبرهن أن :

$(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{4} < \theta_n < 1$

بالترجع :

من أجل $n=0$ لدينا :

$\frac{1}{4} < \theta_0 < 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$

وهذا صحيح .

ليكن $n \geq 0$

نفترض أن : $\frac{1}{4} < \theta_n < 1$

نعلم أن f دالة تزايدية قطعا على $[0 ; 1]$.

7 - أ) حساب :

$\int_1^{\alpha} x^2\ln(x)\,dx$

نستعمل مكاملة بأجزاء :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases} ; \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

اذن :

$$\int_1^{\alpha} x^2\ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx$$

$$= \frac{\alpha^3\ln(\alpha)}{3} - \frac{\ln(1)}{3} - \int_1^{\alpha}\frac{x^2}{3}\,dx$$

$$= \frac{\alpha^3\ln(\alpha)}{3} - \left[\frac{x^3}{3\times 3}\right]_1^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^3\ln(\alpha)}{3} - \left(\frac{\alpha^3}{9} - \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{3\alpha^3\ln(\alpha)}{9} - \frac{\alpha^3}{9} + \frac{1}{9}$$

اذن :

$$\int_1^{\alpha} x^2\ln x\,dx = \frac{3\alpha^3\ln(\alpha) - \alpha^3 + 1}{9}$$

7 - ب) مساحة الحيز هي :

$\left(\int_1^{\alpha} |f(x)|\,dx\right) u.a$

حيث :

$u.a = 1\ cm^2$

f تناقصية على المجال $[1, \alpha]$ اذن :

$\forall x \in [1 ; \alpha] ;\ \underbrace{f(\alpha)}_{=0} \leq f(x) \leq f(1)$

$\Rightarrow \forall x \in [1 ; \alpha] ;\ 0 \leq f(x)$

ومنه : f موجبة على $[1, \alpha]$ اذن :

$$\int_1^{\alpha} |f(x)|\,dx = \int_1^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$= \int_1^{\alpha} x - x^2\ln(x)\,dx$$

$$= \int_1^{\alpha} x\,dx - \int_1^{\alpha} x^2\ln(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\alpha} - \frac{3\alpha^3\ln\alpha - \alpha^3 + 1}{9}$$

(حسب السؤال السابق)

إذن فهي تزايدية تماما على المجال $[\frac{1}{4};1]$

ولدينا:

$$\frac{1}{4} < \theta_n < 1 \Rightarrow f(\frac{1}{4}) < f(\theta_n) < f(1)$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{4}) < \theta_{n+1} < 1$$

لأن $f(1) = 1$ ولدينا:

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{4})^2 \ln(\frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(-\ln(4))$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\ln(4)}{16}$$

لدينا: $4 > 1 \Rightarrow \ln(4) > 0 \Rightarrow \frac{\ln(4)}{16} > 0$

إذن:

$$\frac{1}{4} + \frac{\ln(4)}{16} > \frac{1}{4}$$

أي أن:

$$f(\frac{1}{4}) > \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{4} < \theta_{n+1} < 1$$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$.

وحسب مبدأ التراجع:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{4} < \theta_n < 1$$

② نبين أن (θ_n) تزايدية تماما:

ليكن n من $\mathbb{N}$.

لدينا:

$$\theta_{n+1} - \theta_n = f(\theta_n) - \theta_n$$

$$= \theta_n - \theta_n^2 \ln(\theta_n) - \theta_n$$

$$= -\theta_n^2 \ln(\theta_n)$$

نعلم أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{4} < \theta_n < 1$

إذن:

$$\begin{cases} \theta_n > 0 \\ \theta_n < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_n > 0 \\ \ln(\theta_n) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_n^2 \ln(\theta_n) < 0$$

$$\Rightarrow -\theta_n^2 \ln(\theta_n) > 0$$

$$\Rightarrow \theta_{n+1} - \theta_n > 0$$

ومنه (θ_n) متتالية تزايدية.

الاستنتاج:

(θ_n) تزايدية ومحصورة إذن فهي متقاربة.

③ حساب $\lim \theta_n$:

لدينا:

- (θ_n) متقاربة و $\theta_0 \in [\frac{1}{4};1]$
- f دالة مستمرة على $[\frac{1}{4};1]$
- $f([\frac{1}{4};1]) \subset [\frac{1}{4};1]$

إذن نهاية (θ_n) هي حل للمعادلة: $f(x) = x$ في المجال $[\frac{1}{4};1]$

نحل لكل x من $[\frac{1}{4};1]$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2\ln(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \text{ أو } \ln(x) = 0)$$

لكن $x^2 \neq 0$ لأن $\frac{1}{4} < x < 1$

ومنه: $\ln(x) = 0$ أي أن: $x = 1$

وبما أن: $1 \in [\frac{1}{4};1]$ فإن:

$$\lim \theta_n = 1$$

* * *

تمرين يلخص طريقة حل متتالية الثانية باك علوم

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1)

أ) بين بالترجع أن $1 \prec u_n \prec 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) تحقق ان $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(3-u_n)}{6+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم بين أن (u_n) متتالية تزايدية

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

---

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بمايلي $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ) بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{9}$.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم بين أن $u_n = \frac{3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ج) استنتج النهاية $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

---

3)

أ) بين أن $3 - u_{n+1} \prec \frac{5}{7}(3 - u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) استنتج أن $0 \prec 3 - u_n \prec \left(\frac{5}{7}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ج) استنتج النهاية $\lim_{n \to +\infty} u_n$

تصحيح تمرين من امتحان
- تجريبي في المتتاليات -

①

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8u_n+3}{u_n+6} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) أ- لنبين أن $1 < u_n < 3$.

الطريقة الأولى:

- الطريقة نستعمل التراجع: نبين: $u_n < 3 \iff u_n - 3 < 0$؟

$1 < u_n \iff u_n - 1 > 0$؟

لنتحقق: لـ $n=0$ $1 < u_0 = 2 < 3$ صحيحة

لنفترض أن: من أجل n: $1 < u_n < 3$ ونبين أن $1 < u_{n+1} < 3$

أ- لنبين أن $u_{n+1} < 3$.

$$u_{n+1} - 3 = \frac{8u_n+3}{u_n+6} - 3$$

$$= \frac{8u_n+3-3(u_n+6)}{u_n+6}$$

$$= \frac{5u_n - 15}{u_n+6}$$

$$= \frac{5(u_n-3)}{u_n+6} < 0 \quad \left(u_n - 3 < 0 \ \text{HR}. \quad \frac{5}{u_n+6} > 0 \ (1 < u_n) \right)$$

ومنه $u_{n+1} < 3$

- لنبين أن $1 < u_{n+1}$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{8u_n+3}{u_n+6} - 1$$

$$= \frac{8u_n+3-(u_n+6)}{u_n+6}$$

$$= \frac{7u_n - 1}{u_n+6} > 0 \quad \left(u_n > 1 \ (\text{HR}) \Rightarrow u_n > \frac{1}{7} \right)$$

ومنه $u_{n+1} - 1 > 0$ إذن $u_{n+1} > 1$

- وبالتالي $1 < u_n < 3$ -

②

1) ب) لنتحقق أن: $U_{n+1}-U_n=\frac{(1+U_n)(3-U_n)}{6+U_n}$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{8U_n+3}{U_n+6}-U_n=\frac{8U_n+3-U_n(U_n+6)}{U_n+6}$$

$$=\frac{8U_n-U_n^2-6U_n+3}{U_n+6}$$

$$=\frac{-U_n^2+2U_n+3}{U_n+6}$$

$$=\frac{(1+U_n)(3-U_n)}{U_n+6} \quad \left((1+U_n)(3-U_n)=-U_n^2+2U_n+3\right)$$

- يكفي نشر -

لنبين أن (U_n) تزايدية: $U_{n+1}-U_n>0$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(1+U_n)(3-U_n)}{6+U_n}>0 \quad \left(\frac{1+U_n}{6+U_n}>0 \Leftarrow U_n>1 \text{ و } 3-U_n>0 \Rightarrow U_n<3\right)$$

ومنه U_n تزايدية

ج- نستنتج أن U_n متقاربة:

U_n تزايدية ومحدودة ب 3 اذن U_n متقاربة.

2)

$$V_n=\frac{U_n-3}{U_n+1}.$$

أ) لنبين أن (V_n) هندسية أساسها $\frac{5}{9}$. (الطريقة)

$V_{n+1}=\dots = \frac{5}{9}V_n$:

- 1 لنحسب:

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+1}.$$

نحسب: (انظر ما سبق س 1)-أ))

$$U_{n+1}-3=\frac{5(U_n-3)}{U_n+6}$$

لنحسب:

$$U_{n+1}+1=U_{n+1}+1=\frac{8U_n+3}{U_n+6}+1$$

$$=\frac{8U_n+3+(U_n+6)}{U_n+6}$$

$$=\frac{9U_n+9}{U_n+6}=\frac{9(U_n+1)}{U_n+6}.$$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+1} = \frac{\frac{5(U_n-3)}{(U_n+6)}}{\frac{9(U_n+1)}{(U_n+6)}} = \frac{5(U_n-3)}{9(U_n+1)} = \frac{5}{9}\cdot\frac{U_n-3}{U_n+1} = \frac{5}{9}\cdot V_n \quad (3)$$

و منه : $V_{n+1} = \frac{5}{9}\cdot V_n$ اذن V_n متتالية هندسية اساسها : $\frac{5}{9}$.

ج) ب- لنكتب V_n بدلالة n :

V_n متتالية هندسية اذن $V_n = V_p \cdot q^{n-p}$: $\begin{cases} V_p = V_0 \\ q = \frac{5}{9} \end{cases}$

الطريقة :

1) الحد V_n بدلالة n

- $V_n = V_p \cdot q^{n-p}$ - هندسية -
- $V_n = V_p + (n-p)r$ - حسابية -

2) لحذد U_n بدلالة V_n

3) لتعوض V_n في U_n .

* لحسب $V_0 = \frac{U_0-3}{U_0+1} = \frac{2-3}{2+1} = -\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow V_n = V_0 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-0}$

$$V_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n$$

* للحذد **U_n بدلالة V_n**

$V_n = \frac{U_n-3}{U_n+1} \Leftrightarrow V_n(U_n+1) = U_n-3$

$\Leftrightarrow V_n \cdot U_n + V_n = U_n - 3$

$\Leftrightarrow V_n \cdot U_n - U_n = -3 - V_n$

$\Leftrightarrow U_n(V_n-1) = -3-V_n$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{-3-V_n}{V_n-1} = \frac{V_n+3}{1-V_n}$.

و منه $U_n = \frac{V_n+3}{1-V_n}$.

* لعوض نعوض V_n ب : $-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n$

$$U_n = \frac{-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 3}{1-\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n\right)} = \frac{-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 3}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{3-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$$

④ ومنه :

$$U_n = \frac{3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$$

ج - نستنتج نهاية U_n .

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$$

$$= \frac{3}{1}$$

$$= 3 \qquad \left(\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0 \quad \left(-1 < \frac{5}{9} < 1\right) \right)$$

3 - أ - لدينا أن $3 - U_{n+1} < \frac{5}{7}(3 - U_n)$

$$3 - U_{n+1} = -(U_{n+1} - 3)$$

$$= -\left(\frac{5(U_n - 3)}{U_n + 6}\right) \qquad \text{(حساب في السؤال 1.)}$$

$$= \frac{5(3 - U_n)}{U_n + 6}.$$

$$= \frac{5}{U_n + 6}(3 - U_n)$$

لدينا :

$$U_n > 1 \Rightarrow U_n + 6 > 1 + 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{U_n + 6} < \frac{1}{7}$$

و منه $\frac{1}{U_n + 6} \cdot 5(3 - U_n) < \frac{5(3 - U_n)}{7} \quad (3 - U_n > 0)$

ومنه $\frac{1}{U_n + 6} \cdot 5(3 - U_n) < \frac{5}{7}(3 - U_n)$

وبالتالي $3 - U_{n+1} < \frac{5}{7}(3 - U_n)$.

لأن : $3 - U_{n+1} = \frac{5}{U_n + 6}(3 - U_n)$.

⑤ 3 ب) نستنتج أن $0 < 3 - u_n < \left(\frac{5}{7}\right)^n$

لدينا:

$$3 - u_{n+1} < \frac{5}{7}(3 - u_n)$$

إذن:

نعوض $n+1$ ب n

$$3 - u_n < \frac{5}{7}(3 - u_{n-1})$$

نعوض ب $n-1$

$$3 - u_{n-1} < \frac{5}{7}(3 - u_{n-2})$$

ضرب طرف في طرف ونختزل.

$\vdots$

نعوض 0 ب 1

$$3 - u_1 < \frac{5}{7}(3 - u_0)$$

$$3 - u_n < \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1-0+1}(3 - u_0)$$

$$3 - u_n < \left(\frac{5}{7}\right)^n (3 - u_0)$$

$3 - u_0 = 3 - 2 = 1$

$$3 - u_n < \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

ومنه

$$0 < 3 - u_n < \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

ج) استنتاج نهاية u_n:

$$\lim_{n \to +\infty} 3 - u_n = 0$$

لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$ و $\lim_{n \to 0} 0 = 0$

وحسب خاصية الترتيب والنهايات

كيف نجيب على سؤال حدد طبيعة المثلث ABC ؟
درس الأعداد العقدية .

س : بين أن $\frac{b-b'}{a-b'} = i$ واستنتج طبيعة المثلث $AB'B$ ؟

$b'=6$; $b=3-3i$; $a=3+3i$

ج :
$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{3-3i-6}{3+3i-6} = \frac{-3-3i}{-3+3i} = \frac{-3(1+i)}{3(-1+i)} = -\frac{(1+i)}{-1+i}$$
$$= -\frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(-1)^2+(1)^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$\rightarrow (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$; $i^2=-1$.

استنتاج : $\frac{b-b'}{a-b'} = i$ اذن المثلث $B'AB$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين رأسه B'

$\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right| = |i| = 1 = \frac{|b-b'|}{|a-b'|} \Rightarrow |b-b'| = |a-b'|$: أي
$\Rightarrow B'B = B'A$

و

$(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B}) \equiv \arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right) [2\pi]$
$\equiv \arg(i) [2\pi]$
$\equiv \pi/2 [2\pi]$.

ملاحظة : نفس الشيء اذا كان : $\frac{b-a}{c-a} = -i$

(المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين
رأسه A)

س : بين أن : $\frac{b-c}{a-c} = 2i$ واستنتج طبيعة المثلث ABC ؟

$a=3+5i$; $b=3-5i$; $c=7+3i$

ج :
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{3-5i-(7+3i)}{3+5i-(7+3i)} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{-4(1+2i)}{-2(2-i)} = \frac{2(1+2i)}{2-i}$$
$$\frac{2(1+2i)}{2-i} = \frac{2(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2(2+i+4i-2)}{2^2+1^2} = \frac{2\times 5i}{5} = 2i$$

ABC مثلث قائم الزاوية رأسه C فقط .

أي

ملاحظة نفس الشيء بالنسبة اذا كان $\frac{b-c}{a-c} = 2i$; $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{b-c}{a-c} = $ عدد i ; عدد $\neq 1$; $\neq -1$

② سؤ: ما طبيعة المثلث ABC ؟ بحيث :

$$\frac{b-a}{c-a} = \cos\theta + i\sin\theta :$$

ج : المثلث متساوي الساقين رأسه A لأن :

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = |\cos\theta + i\sin\theta| = 1 .$$

مثال : س : ؟ $c = -\sqrt{3}+i$, $b = -2i$, $a = -2\sqrt{3} - 2i$, $d = \sqrt{3}+i$

بين أن : $\frac{b-d}{c-d} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ واستنتج طبيعة المثلث BCD

ج :

$$\frac{b-d}{c-d} = \frac{-2i-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i} = \frac{-3i-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \frac{(-3i-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

$$\frac{b-d}{c-d} = \frac{-3\sqrt{3}i-3}{-6} = \frac{-3\sqrt{3}}{-6}i - \frac{3}{-6} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

لنحدد طبيعة BCD :

$$\left|\frac{b-d}{c-d}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

ومنه المثلث BCD متساوي الساقين رأسه D :

بما أن $\frac{b-d}{c-d} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ إذن $\arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

والمثلث BCD مثلث متساوي الأضلاع .

الحالة II عندما تكون : الدوران : $R(A, \theta)$:

س : بين أن $R(B) = C$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

ج : المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A (مركز الدوران) ← مركز الدوران

البرهان : لأن : $R(B) = C \Rightarrow AB = AC$.

1) حالة خاصة . إذا كانت زاوية الدوران $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$:

المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A وقائم الزاوية

البرهان : لأن $R(B) = C \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta\,[2\pi]$

2) حالة خاصة : إذا كان زاوية الدوران $\theta = \frac{\pi}{3}$

المثلث متساوي الأضلاع

البرهان لأن $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ و $AB = AC$.

③ 1- كيف نحدد الشكل المثلثي لعدد عقدي باستعمال الآلة الحاسبة؟

مثال: $a = 1 - i\sqrt{3}$:

أ- نحسب معيار a :

$|a| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{4}$
$= 2$

ب- نحل ب : $|a| = 2$

$a = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

الآلة الحاسبة : - أول شيء : * mod : Radian

- ثانيا : نحسب : $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

- ثالثا : نضع الاشارة التي في i

ومنه $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ومنه

$a = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2- كيف نحسب a^{15} ؟ وكيف نحسب $a^{(\text{الأس عدد})}$

$a^{15} = \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{15}$
$= 2^{15}\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{15\pi}{3}\right)\right)$
$= 2^{15}\left(\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)\right)$

الآلة الحاسبة : mod Radian.
$\cos(-5\pi) = -1$; $\sin(-5\pi) = 0$

$= 2^{15} \times (-1)$
$= -2^{15}$

← التحقق بالنسبة لحساب جداء عددين في الكتابة المثلثية

* $[r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$
* $\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

أسئلة في امتحان باك

حدد إشارة $g(x)$ وطريقة الإجابة عنها.

- استعمال جدول تغيرات -

I) الحالة الأولى : يعطيك جدول تغيرات :

مثال : $g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$ الجدول جانبه جدول تغيرات

1) احسب $g(1)$

2) من خلال هذا الجدول حدد اشارة $g(x)$ على كل من $]0,1]$ و $[1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$		
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

تصحيح :

$g(1)=1^3-1-2\ln^2 1+2\ln 1$
$=0$

العدد المسلم هو 1

* الطريقة الأولى : في المجال $I=]0,1]$:

$$\begin{cases} x\leq 1 \\ g \text{ تزايدية في } I \end{cases} \Rightarrow g(x)\leq g(1)=0 \Rightarrow g(x)\leq 0$$

في المجال $J=[1,+\infty[$:

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ g \text{ تزايدية في } J \end{cases} \Rightarrow g(x)\geq g(1)=0 \Rightarrow g(x)\geq 0$$

ومنه :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

* الطريقة الثانية : في المجال $]0,1]$ لدينا 0 قيمة قصوى اذن $g(x)\leq 0$

في المجال $[1,+\infty[$ 0 قيمة دنيا اذن $g(x)\geq 0$

لأن : g تزايدية في $]0,+\infty[$

مثال : $g(x)=e^x+2xe^x-1$

1) بين أن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ثم احسب $g(0)$



② مثال رقم ٤ : $g(x)=e^x+2xe^x-1$

1) بين أن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ثم احسب $g(0)$

2) بين أن : $g'(x)=(2x+3)e^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

3) اعط جدول تغيرات الدالة g

4) استنتج $g(x)\geq 0$ $\forall x\geq 0$ و $g(x)\leq 0$ $\forall x\leq 0$

تصحيح :

1) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{-\infty} e^x+2xe^x-1$ ($e^x\to 0$, $2xe^x\to 0$)

$=-1$ $\left(\lim_{-\infty} e^x=\lim_{-\infty} xe^x=0\right)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim_{+\infty} e^x=\lim_{+\infty} xe^x=+\infty$ لأن

$g(0)=1+0-1$
$=0$

2) $g'(x)=(e^x+2xe^x-1)'=(e^x)'+2(xe^x)'-(1)'$

$=e^x+2((x)'e^x+(e^x)'.x)$

$=e^x+2(e^x+xe^x)=(2x+3)e^x$

3) نحدد اشارة $g'(x)$: $e^x>0$ ومنه الاشارة $2x+3$

$2x+3=0\Leftrightarrow x=-3/2$.

الطريقة I

x	$-\infty$	$-3/2$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
	-1 ↘	$f(-3/2)$	↗ 0	↗ $+\infty$

في المجال $]-\infty,0]$: 0 قيمة قصوى اذن $g(x)\leq 0$

$0=\max(-1,f(-3/2),0)$ (جدول)

$[0,+\infty[$: 0 قيمة دنيا (جدول) $g(x)\geq 0$

الطريقة II في المجال :

① $]-\infty,-3/2]$ -1 قيمة قصوى اذن $g(x)\leq -1$

② $[-3/2,0[$ 0 قيمة قصوى اذن $g(x)\leq 0$

من ① و ② نستنتج أن $g(x)\leq 0$ في $]-\infty,0]$

في المجال : $[0,+\infty[$: 0 قيمة دنيا اذن $g(x)\geq 0$

③

– تحديد اشارة الدالة انطلاقا من منحناها مرسوم – كيفية دراسة متتالية $U_{n+1}=f(U_n)$

– دراسة مثال من امتحان باك – 2018 –

III) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=f(x)-x$

1) أ- تحقق من أن $h(1)=0$

ب- في الشكل جانبه (C_h) هو التمثيل المبياني للدالة h . حدد إشارة $h(x)$ على كل من $]0,1]$ و $[1,+\infty[$ ثم استنتج أنه لكل x من المجال $[1,+\infty[$ لدينا $f(x)\leq x$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$u_0=e$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من IN

أ- بين بالترجع أن : $1\leq u_n\leq e$ لكل n من IN

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . (يمكن استعمال نتيجة السؤال III) 1) ب -)

ج – استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

– جواب :

1) أ – لنتحقق $h(1)=0$.

C_h يقطع محور الأفاصيل في النقطة ذات الأفصول 1 اذن $h(1)=0$

ب – نحدد اشارة h .

• في المجال $]0,1]$ لدينا : C_h فوق محور الأفاصيل اذن $h(x)\geq 0$ انظر الشكل

• في المجال $[1,+\infty[$: C_h تحت محور الأفاصيل اذن $h(x)\leq 0$

استنتاج : $h(x)=f(x)-x$ في $[1,+\infty[$: $h(x)\leq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq x$

2) دراسة متتالية (U_n) : $U_{n+1}=f(U_n), U_0=e$

أ – لنبين أن : $1\leq U_n\leq e$ ؟

* $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

– ل $n=0$ $1\leq U_0=e\leq 1$ صحيحة

– لنفترض أن : $1\leq U_n\leq e$ صحيحة من اجل n

– لنبين أن $1\leq U_{n+1}\leq e$.

(f تتغير ≥ توافظ عليهم)

لدينا : $1\leq U_n\leq e$ و f تزايدية في $[1,+\infty[$ } اذن $\frac{3}{2}=f(1)\leq f(U_n)\leq f(e)\leq e$

$f(1)=\frac{3}{2}$
$f(e)\leq e$
$x=e;(f(x)\leq x)$

ومنه $1\leq\frac{3}{2}\leq U_{n+1}\leq e$

ومنه $1\leq U_{n+1}\leq e$ ومنه صحيحة ل $n+1$.

ب – لنبين أن U_n تناقصية : استعمال : $f(x)\leq x$ (دائما)

في المجال $[1,+\infty[$ $f(x)\leq x$ ومنه ل $x=U_n$ $U_{n+1}=f(U_n)\leq U_n$

ومنه : $U_{n+1}\leq U_n$ اذن U_n تناقصية

ج – لنستنتج أن : U_n متقاربة :

U_n تناقصية ومصغورة ب 1 اذن

U_n متقاربة

نهاية U_n : – $U_{n+1}=f(U_n)$

– f متصلة في $[1,e]$ اذن نهايتها l : $f(l)=l$

– $f([1,e])\subset[1,e]$ ومنه $l=1$ لأن الحل الوحيد ل $f(x)=x$.

– U_n متقاربة